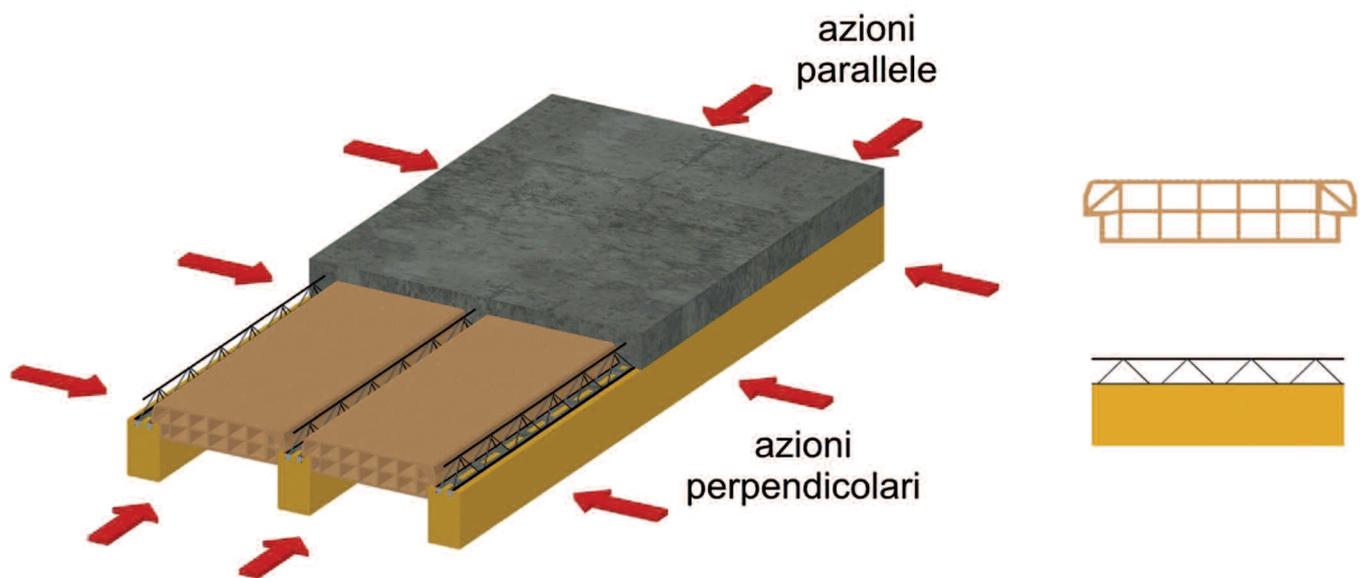


I SOLAI E LE CONNESSIONI TRA GLI ELEMENTI

Com'è noto, il solaio ha la funzione di trasferire le azioni dai rispettivi punti di applicazione alle strutture principali dell'edificio. Pertanto deve avere un'adeguata resistenza e rigidità in presenza dei carichi verticali, anche per garantire un adeguato livello di comfort, e un'adeguata resistenza e rigidità in presenza di azioni sismiche.

Con particolare riferimento al caso sismico, le norme prescrivono che il solaio “possa essere considerato” infinitamente rigido nel proprio piano rispetto agli elementi verticali e sufficientemente resistente. In altre parole il solaio deve costituire un diaframma orizzontale in grado di trasmettere le forze tra i diversi sistemi resistenti a sviluppo verticale (telai e/o pareti). Le norme sismiche prescrivono anche che “quando tale verifica sia necessaria si considereranno agenti sui diaframmi le forze ottenute dall'analisi, aumentate del 30%”.

Il funzionamento a diaframma è indispensabile perché l'insieme strutturale risultante sia in grado di reagire alle azioni esterne orizzontali con un comportamento di tipo globale. A tal fine i solai devono essere ben collegati strutture verticali e dotati di una sufficiente rigidità e resistenza nel loro piano. Le norme sismiche raccomandano anche di preoccuparsi, nei casi di miglioramento o adeguamento degli edifici esistenti, di ridurre le carenze dei collegamenti tra pareti e solai e l'eccessiva deformabilità dei solai, prevedendo interventi volti ad “assicurare alla costruzione un buon comportamento d'assieme”, nel quale i solai costituiscono “un vincolo per le pareti sollecitate da azioni ortogonali al proprio piano” e specifica che, in assenza di tali caratteristiche, ossia per gli edifici in muratura esistenti con solai flessibili, va effettuata “l'analisi delle singole pareti o dei sistemi di pareti complanari che costituiscono l'edificio, ciascuna analizzata come struttura indipendente, soggetta ai carichi verticali di competenza ed all'azione del sisma nella direzione parallela alla parete”.



Le tipologie di solaio che soddisfano i suddetti requisiti sono individuate dalle stesse norme:

- a) a soletta piena in c.a.;
- b) in latero-cemento con soletta in c.a. di spessore ≥ 40 mm;
- c) in struttura mista con soletta in c.a. di spessore ≥ 50 mm, collegata da connettori a taglio agli elementi strutturali di solaio in acciaio o in legno.

Le norme sismiche non precludono la possibilità di “altre soluzioni costruttive”, per le quali “l’ipotesi di infinita rigidità dovrà essere valutata e giustificata dal progettista”. Al riguardo le Istruzioni CNR-DT 206/2006 (punto 7.12) recitano: “la connessione tra soletta e trave in legno va realizzata con sistemi dei quali sia stata dimostrata la validità per mezzo di adeguate campagne sperimentali condotte secondo le pertinenti norme. La rigidità K_{ser} e la capacità portante $F_{v,Rk}$ della connessione trave-soletta dovranno essere determinate tramite prove sperimentali e sulla base di teorie di comprovata validità che tengano conto delle specifiche caratteristiche della connessione così come sarà utilizzata in opera”. In particolare dovrà essere considerata l’eventuale presenza di una distanza non nulla tra intradosso soletta ed estradosso trave (conseguente ad esempio alla presenza di un assito).

Oltre che sulle connessioni con spinotti, le stesse istruzioni forniscono le seguenti prescrizioni sulla rigidità e resistenza di connessioni realizzate con denti di calcestruzzo, che consistono nella realizzazione di “denti di calcestruzzo disposti entro opportune fresature nel legno e ottenuti mediante lo stesso getto della cappa”. La resistenza della connessione sarà assunta pari al minimo tra i seguenti valori calcolati:

- resistenza a scorrimento longitudinale e a flessione locale del legno indebolito dalle fresature;
- resistenza a taglio e flessione del dente di calcestruzzo;
- resistenza a rifollamento del legno.

La valutazione della rigidità della connessione dovrà tener conto del reale comportamento sperimentale.

Ancora le Istruzioni CNR-DT 206/2006 ammettono “l’uso di altri sistemi di connessione purché la resistenza e la rigidità vengano chiaramente individuate su base sperimentale e teorica”.

Infine, con riferimento alla deformabilità del solaio misto legno-calcestruzzo, il calcolo della freccia della struttura mista legno calcestruzzo dovrà tenere conto della deformabilità delle connessioni. In mancanza di una valutazione più accurata, l’incremento di freccia della trave inflessa, Δw , dovuto alla deformabilità delle connessioni, può essere assunto pari a:

$$\Delta w = 10 \cdot \delta$$

dove:

- $\delta = V/K_{ser}$ è il massimo scorrimento della connessione, in *mm*;
- V è il taglio sulla connessione più sollecitata, in *N*;
- K_{ser} è la rigidità della connessione, in *N/mm*.

Si ricorda, infine, che come larghezza di soletta collaborante con la trave di legno va assunta quella della nervatura incrementata di un quinto della luce. In ogni caso tale dimensione non può superare l’interasse tra le travi.

1.2 Comportamento delle travi composte a connessione deformabile

L’accoppiamento legno-calcestruzzo consente di sfruttare meglio le caratteristiche dei due materiali, realizzando sezioni più efficienti a partire da elementi di ridotte dimensioni. L’efficienza del sistema è tanto più elevata quanto più è rigida la connessione tra elemento in legno e soletta in c.a., ossia quanto più sono impediti gli scorrimenti relativi fra le superfici a contatto degli elementi

che compongono la sezione. Nel caso di connessione infinitamente rigida legno e calcestruzzo lavorano come se l'elemento fosse in un solo pezzo; se la connessione è infinitamente flessibile, invece, elemento in legno e soletta in c.a. sono disaccoppiati e lavorano in parallelo. La determinazione dello stato tensionale e deformativo può essere condotta con la teoria classica degli elementi inflessi, nell'ipotesi di Bernoulli di conservazione delle sezioni piane da cui discende la nota relazione tra momento sollecitante e curvatura della trave:

$$\chi = -\frac{M}{EJ}$$

Nel caso limite di rigidità nulla, può ipotizzarsi che si conservano piane le sezioni delle singole travi componenti, mentre nel caso di rigidità infinita l'ipotesi riguarda l'intera sezione composta. Detta k la rigidità specifica, per unità di lunghezza, del sistema di connessione, si ha:

- $k = 0$: collegamento nullo, si verifica uno scorrimento relativo longitudinale (slip) e il taglio non può essere trasmesso all'interfaccia tra legno e calcestruzzo;
- $k = \infty$: collegamento rigido, non si verifica scorrimento e il taglio viene trasmesso integralmente.

Il comportamento statico reale della sezione composta legno-calcestruzzo, quindi, è influenzato dalle rigidità flessionali ed assiali degli elementi componenti ma anche dalla deformabilità della connessione ed è sempre intermedio tra questi due casi estremi di rigidità nulla e di rigidità infinita. A causa dello scorrimento, non essendo più valida l'ipotesi di conservazione delle sezioni piane per la sezione composta (ipotesi comunque valida per gli elementi di legno e di calcestruzzo separatamente), esiste un asse neutro per il legno, che lavora a tenso-flessione, e uno per il calcestruzzo, soggetto a pressoflessione. In genere, ai fini della rigidità, la sezione di calcestruzzo viene considerata interamente reagente, potendo poi disporre una armatura aggiuntiva in grado di assorbire eventuali sforzi di trazione.

Val la pena osservare che supponendo il collegamento rigido si ottiene una sopravvalutazione sia del momento di inerzia della sezione sia della forza di scorrimento a cui devono far fronte i connettori. Inoltre, ad un incremento di rigidità della connessione corrisponde un innalzamento dell'asse neutro e, quindi, un incremento della zona tesa nella trave di legno inferiore, accompagnato da una diminuzione della massima deformazione, con conseguente diminuzione di curvatura della struttura composta (Figura 2.3.1).

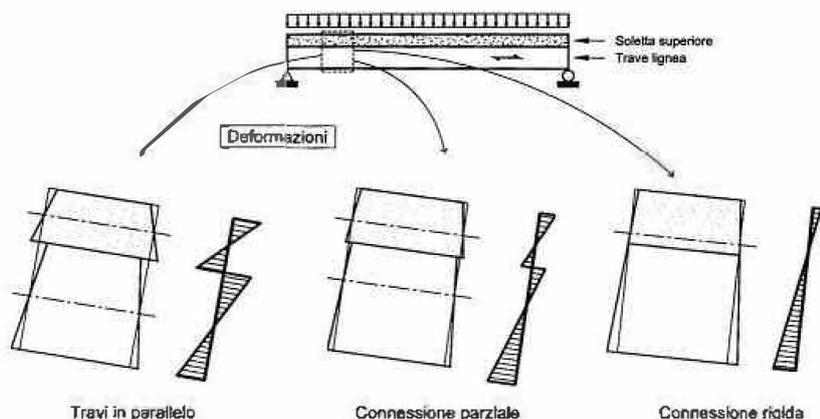


Figura 2.3.1 – Distribuzione delle deformazioni per flessione in una trave composta in funzione della rigidità della connessione (da Piazza et al., 2005)

Il progetto di una struttura composta legno-calcestruzzo segue la teoria elastica delle travi composte per calcolare la effettiva rigidezza flessionale. Aspetto fondamentale assume il coefficiente della connessione a taglio γ , il quale dipende sia dalla rigidezza dei connettori sia dalla loro spaziatura. La rigidezza efficace a flessione, che si basa sul coefficiente di taglio della connessione, è la base per il calcolo della sollecitazione dei connettori e delle tensioni nel legno e nel calcestruzzo. Il coefficiente di taglio della connessione che si ottiene con gli usuali connettori è compreso tra $0.1 < \gamma < 0.4$.

Qualunque tipo di connessione meccanica posta fra due elementi di legno o fra legno e calcestruzzo, se sottoposta a sforzi di taglio si deforma secondo la curva rappresentata in figura 2.3.2; nei calcoli allo SLU si considera la rigidezza secante al valore di rottura K_u , mentre per i calcoli agli SLE si utilizza la rigidezza secante al 40% del carico ultimo K_{ser} che corrisponde circa alla sollecitazione sul connettore per i carichi di esercizio.

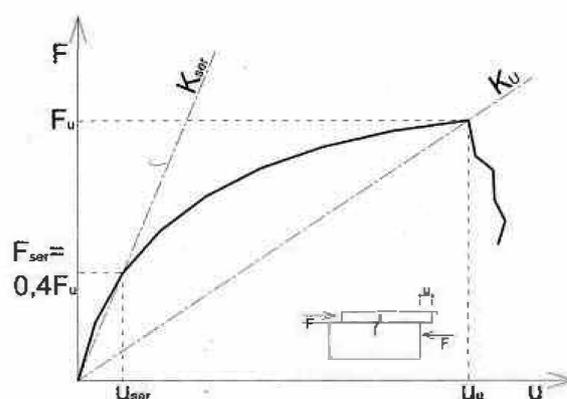


Fig. 2.3.2 – Rigidezza in esercizio K_{ser} e a collasso K_u di una trave assemblata meccanicamente (da Ceccotti et al., 2004)

Le caratteristiche meccaniche della connessione, intesa come insieme legno-connettore-calcestruzzo, devono essere determinate con apposite prove secondo la norma UNI EN 26891/1991. La verifica della connessione è soddisfatta se lo sforzo di taglio sul connettore è inferiore alla resistenza di progetto, pertanto non occorre fare ulteriori verifiche locali sul legno, sul calcestruzzo o sul connettore. Ogni tipo di connettore è caratterizzato dai propri valori di resistenza e di rigidezza; l'unico sistema di connessione perfettamente rigido è l'incollaggio.

L'aderenza fornisce un contributo importante al comportamento meccanico del solaio che, infatti, sotto carico mostra generalmente deformazioni inferiori a quelle teoriche. Ciononostante l'aderenza va portata in conto con molta prudenza, perché molto sensibile alle vibrazioni e al ritiro del legno, adottando opportuni accorgimenti in fase esecutiva.

Essendo sia il legno che il calcestruzzo materiali viscosi, il regime tensionale cambia nel tempo con una migrazione delle tensioni dal calcestruzzo al legno e un aumento delle deformazioni; pertanto, vanno eseguite verifiche sia a "tempo zero", a fenomeni lenti non ancora iniziati, che a "tempo infinito", dove si tiene conto degli effetti delle deformazioni lente assumendo moduli di elasticità e rigidezza della connessione ridotti in modo fittizio, attraverso un coefficiente di viscosità che per la connessione è quello del legno k_{def} . Gli effetti viscosi sono dovuti ai carichi fissi e ad un'aliquota dei carichi variabili (la frazione ψ_2).

1.2.1 Connessione di rigidezza nulla

Nel caso di rigidezza nulla si mantengono piane le sezioni delle singole travi e lo stato deformativo e tensionale è illustrato nella figura 2.3.2.

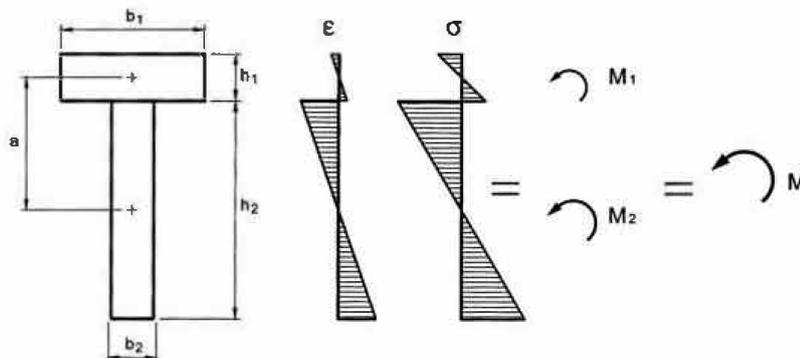


Fig. 2.3.2 – Deformazioni e tensioni da flessione in una trave composta con rigidezza nulla (da Piazza et al., 2005)

Le due travi presentano la stessa curvatura in sezioni inizialmente di medesima ascissa x, misurata a partire da una estremità della trave (Figura 2.3.3).

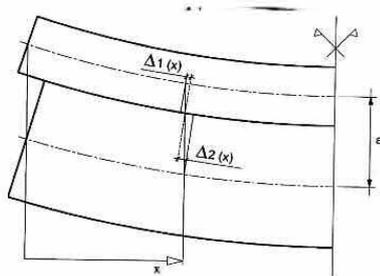


Fig. 2.3.3 – Scorrimento all'interfaccia (da Piazza et al., 2005)

Il sistema può essere visto come formato da due travi lavoranti in parallelo e la rigidezza flessionale della trave composta è la somma delle singole rigidezze:

$$EJ_0 = \sum E_i J_i = \frac{1}{12} (E_1 b_1 h_1^3 + E_2 b_2 h_2^3)$$

Per le ipotesi di congruenza e di conservazione delle sezioni piane per i singoli elementi, si può scrivere:

$$w_1'' = w_2'' = w'' = -\frac{M_1}{E_1 J_1} = -\frac{M_2}{E_2 J_2} = -\frac{M}{EJ_0}$$

da cui si ricavano i momenti relativi ai due elementi, M_1 e M_2 , in funzione del momento sollecitante esterno M , e le tensioni massime:

$$M_1(x) = \frac{E_1 J_1}{EJ_0} M(x) \quad \rightarrow \quad \sigma_{1\max} = \frac{M_1}{W_1} = \frac{E_1}{EJ_0} \frac{h_1}{2} M(x)$$

$$M_2(x) = \frac{E_2 J_2}{EJ_0} M(x) \quad \rightarrow \quad \sigma_{2\max} = \frac{M_2}{W_2} = \frac{E_2}{EJ_0} \frac{h_2}{2} M(x)$$

Ovviamente, il momento sollecitante si ripartisce tra le due travi proporzionalmente alle rispettive rigidità. Nel caso di rigidità nulla lo scorrimento all'interfaccia risulta, per una trave semplicemente appoggiata:

$$\delta(x) = \Delta_2(x) + \Delta_1(x) = \int_x^{L/2} \frac{h_2/2}{EJ_0} M(x) dx + \int_x^{L/2} \frac{h_1/2}{EJ_0} M(x) dx = \frac{a}{EJ_0} \int_x^{L/2} M(x) dx$$

dove a è la distanza tra i baricentri degli elementi che compongono la sezione. Nel caso di trave con carico uniformemente distribuito sull'intera luce, la formula precedente fornisce per l'ascissa generica x :

$$\delta(x) = \frac{q \cdot a}{EJ_0} (L^3 - 6Lx^2 + 4x^3)$$

Lo scorrimento massimo in corrispondenza degli appoggi ($x = L/2$) vale:

$$\delta_{\max} = \frac{q \cdot a \cdot L^3}{24 \cdot EJ_0}$$

1.2.2 Connessione di rigidità infinita

Nel caso di connessione a rigidità infinita la generica sezione globale della trave composta si conserva piana e non si verificano scorrimenti all'interfaccia legno-calcestruzzo. Il momento sollecitante $M(x)$ risulta essere equilibrato oltre che dai momenti M_1 e M_2 , anche dalla coppia offerta dalle azioni assiali N_1 e N_2 (Figura 2.3.4).

La distanza del baricentro della sezione composta dal lembo inferiore vale:

$$y_{g\infty} = \frac{E_1 A_1 (h_2 + h_1/2) + E_2 A_2 (h_2/2)}{\sum E_i A_i} = \frac{h_2}{2} + \frac{E_1 A_1}{\sum E_i A_i} a$$

Posto:

$$EA_0 = \frac{E_1 A_1 \cdot E_2 A_2}{\sum E_i A_i} = \left(\frac{1}{E_1 A_1} + \frac{1}{E_2 A_2} \right)^{-1}$$

le distanze dei baricentri dei singoli elementi da quello dell'intera sezione sono:

$$a_1 = h_2 + \frac{h_1}{2} - y_{g\infty} = \frac{E_2 A_2}{\sum E_i A_i} a = \frac{EA_0}{E_1 A_1} a \quad a_2 = y_{g\infty} - \frac{h_2}{2} = \frac{E_1 A_1}{\sum E_i A_i} a = \frac{EA_0}{E_2 A_2} a$$

Essendo EJ_0 la rigidità flessionale del sistema con connessione nulla, la rigidità flessionale della sezione composta vale:

$$EJ_\infty = \sum E_i J_i + \sum E_i A_i a_i^2 = EJ_0 + EA_0 a^2$$

Le tensioni massime possono essere espresse come:

$$\sigma_{i\max} = \frac{M(x)}{EJ_\infty} E_i z_i = \frac{M(x)}{EJ_\infty} E_i \left(a_i + \frac{h_i}{2} \right)$$

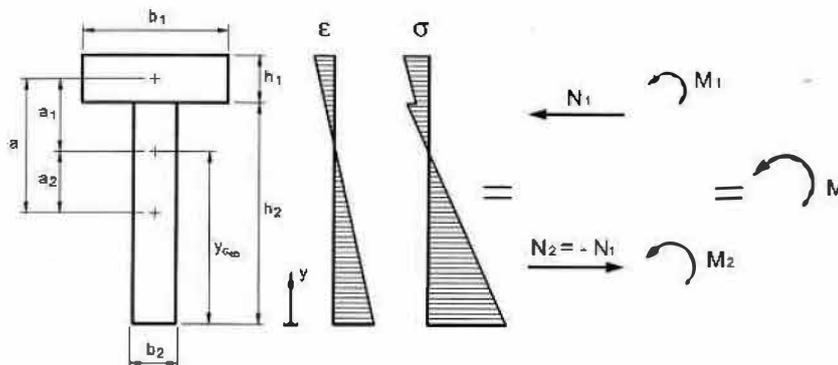


Figura 2.3.4 – Deformazioni e tensioni da flessione in una trave composta con connessione di rigidità infinita (da Piazza et al., 2005)

Ricordando le ipotesi di congruenza ($w_1 = w_2 = w$ e, quindi, $w_1'' = w_2'' = w''$) i momenti flettenti nei due elementi componenti valgono:

$$M_1(x) = \frac{E_1 J_1}{E J_\infty} M(x) \qquad M_2(x) = \frac{E_2 J_2}{E J_\infty} M(x)$$

Attraverso la relazione di equilibrio

$$M(x) = M_1(x) + M_2(x) + N(x) \cdot a$$

si ottiene la seguente espressione per l'azione assiale sollecitante $N_1 = -N_2$, a meno del segno:

$$N(x) = N_\infty(x) = \frac{EA_0 a}{E J_\infty} M(x)$$

da cui

$$\sigma_{i\max} = \frac{M_i}{W_i} + \frac{N}{A_i} = \frac{M(x)}{E J_\infty} \left(E_i \frac{h_i}{2} + E_i a_i \right)$$

La sollecitazione di scorrimento all'interfaccia legno-calcestruzzo è pari alla variazione dell'azione assiale:

$$V_{S_\infty}(x) = N'_\infty(x) = \frac{EA_0 a}{E J_\infty} V(x)$$

$$V_{S_\infty}(x) = \tau_{interfaccia} \cdot b = \frac{V(x)}{E J_\infty} S_1 = \frac{V(x)}{E J_\infty} E_1 A_1 a_1 = \frac{V(x)}{E J_\infty} EA_0 a$$

Allo stesso risultato si giunge attraverso l'uso della formula di Jourawsky.

È facile verificare che per una trave semplicemente appoggiata, con sezione trasversale costituita da due travi uguali in legno accoppiate, soggetta ad un carico uniformemente distribuito sull'intera luce, nell'ipotesi di connessione di rigidità infinita la deformata è pari a 1/4 di quella che si ottiene in assenza di connessione, mentre la tensione massima è la metà.

1.2.3 Connessione deformabile (di rigidità finita)

Nelle situazioni intermedie ai due casi limite, con collegamento semirigido, a causa dello scorrimento relativo tra trave e soletta, il comportamento statico reale può essere ricondotto allo schema di due travi in parallelo, collegate mediante una connessione deformabile. La trattazione generale elastica di questo problema è stata fornita da Newmark (1951) e si basa sulle seguenti ipotesi:

- comportamento elastico lineare dei materiali e della connessione;
- piccoli spostamenti e deformazioni (teoria del primo ordine);
- curvature uguali per gli elementi trave e soletta, (si trascurano fenomeni di separazione o di compenetrazione degli elementi): $w_1'' = w_2'' = w''$;
- conservazione delle sezioni piane per ciascun elemento costituente la sezione;
- connessione uniformemente distribuita lungo la trave con rigidità specifica costante, data dal rapporto $k = K/s$ tra la rigidità del singolo connettore K e l'interasse s ; nel caso di passo dei connettori tra un valore massimo s_{max} (in mezzzeria) e un valore minimo s_{min} (agli appoggi) si può fare riferimento a un interasse equivalente $s_{eq} = 0.75 s_{min} + 0.25 s_{max}$, purché sia $s_{max} \leq 4s_{min}$.
- travi con sezione costante lungo l'asse longitudinale.

Secondo la trattazione generale per una sezione mista, imponendo le equazioni di equilibrio per il tratto dx di trave composta, dell'elemento 1 e dell'elemento 2 (figura 2.3.5), le condizioni di congruenza e le relazioni di elasticità nell'ipotesi di conservazione delle sezioni piane, è possibile ottenere l'equazione differenziale risolvente del secondo ordine nella forma:

$$N_1'' - \alpha^2 N_1 = \beta M$$

Imposte le condizioni al contorno e determinata l'espressione di N_1 , è possibile ricavare le altre grandezze e, di conseguenza, lo stato tensionale della sezione composta.

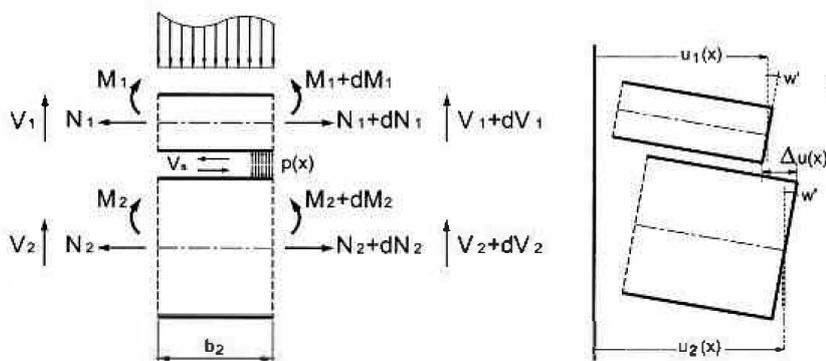


Figura 2.3.5 – Trave composta con connessione deformabile (da Piazza et al., 2005)

Le equazioni di equilibrio si scrivono:
per le azioni interne:

$$N_1 + N_2 = 0 \quad V_1 + V_2 = V(x) \quad M_1 + M_2 - N_1 \cdot a = M(x)$$

per l'elemento infinitesimo:

$$V'(x) = -q(x) \quad M'(x) = V(x) \quad M''(x) = -q(x)$$

per l'elemento 1 ($p(x)$ indica il carico verticale che si scambiano gli elementi):

$$N'_1(x) = -V'_s(x) \quad V'_1(x) = -(q(x) - p(x)) \quad M'_1(x) = V_1(x) - V'_s(x) \cdot h_1/2$$

per l'elemento 2:

$$N'_2(x) = V'_s(x) \quad V'_2(x) = -p(x) \quad M'_2(x) = V_2(x) - V'_s(x) \cdot h_2/2$$

La congruenza degli spostamenti verticali consente di scrivere:

$$w_1'' = w_2'' = w''$$

e lo scorrimento all'interfaccia può essere espresso come:

$$\Delta u(x) = u_2(x) - u_1(x) + w'(x) \frac{h_1}{2} + w'(x) \frac{h_2}{2} = u_2(x) - u_1(x) + w'(x)a$$

Infine, valgono le ben note relazioni di elasticità:

$$w''_1(x) = -\frac{M_1(x)}{E_1 J_1} \quad w''_2(x) = -\frac{M_2(x)}{E_2 J_2}$$

e per la linearità del comportamento della connessione:

$$V'_s(x) = k \cdot \Delta u(x)$$

1.2.3.1 Soluzione esatta

Per la congruenza degli spostamenti, i legami elastici e per l'equilibrio alla rotazione, si può scrivere:

$$M_1(x) = \frac{E_1 J_1}{E J_0} (M(x) + N_1(x)a) \quad M_2(x) = \frac{E_2 J_2}{E J_0} (M(x) + N_1(x)a)$$

Derivando l'equazione di equilibrio, si può scrivere:

$$N_1''(x) = -V'_s(x) = -k \cdot \Delta u'(x) = -k (u_2'(x) - u_1'(x) + w''(x)a)$$

Ricordando che :

$$u_2'(x) = \varepsilon_2(x) = \frac{N_2(x)}{E_2 A_2} = -\frac{N_1(x)}{E_2 A_2} \quad u_1'(x) = \varepsilon_1(x) = \frac{N_1(x)}{E_1 A_1}$$

$$w''(x) = -\frac{M_1(x)}{E_1 J_1} = -\frac{M(x) + N_1(x)a}{E J_0}$$

si può scrivere :

$$N_1''(x) = -k \left[-\frac{N_1(x)}{E_2 A_2} - \frac{N_1(x)}{E_1 A_1} - \frac{M(x) + N_1(x)a}{EJ_0} a \right]$$

per cui

$$N_1''(x) - k \cdot N_1(x) \left[\frac{1}{E_1 A_1} + \frac{1}{E_2 A_2} + \frac{a^2}{EJ_0} \right] = \frac{ka}{EJ_0} M(x)$$

da cui

$$N_1''(x) - \frac{k}{EA_0} \frac{EJ_\infty}{EJ_0} N_1(x) = \frac{ka}{EJ_0} M(x)$$

Ponendo

$$\alpha^2 = \frac{k}{EA_0} \frac{EJ_\infty}{EJ_0} \qquad \beta = \frac{ka}{EJ_0}$$

si scrive la seguente equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti :

$$N_1''(x) - \alpha^2 N_1(x) = \beta M(x)$$

La soluzione generale dell'omogenea associata è :

$$A_n \sinh(\alpha x) + B_n \cosh(\alpha x)$$

La soluzione particolare per carichi $q(x)$ al più lineari è:

$$-\frac{\beta}{a^2} \left(M(x) - \frac{q(x)}{\alpha^2} \right) \rightarrow N_1(x) = A_n \sinh(\alpha x) + B_n \cosh(\alpha x) - \frac{\beta}{a^2} M(x) + \frac{\beta}{\alpha^4} q(x)$$

Le costanti A_n e B_n si determinano in base alle condizioni al contorno. Ad esempio per travi in semplice appoggio $N_1(0) = N_1(L) = 0$.

Nota $N(x)$ è possibile ricavare le altre grandezze ad esclusione della deformata, per la quale sarebbe necessaria una doppia integrazione e, pertanto, conviene procedere nel seguente modo:

$$w''(x) = w_1''(x) = -\frac{M_1(x)}{E_1 J_1} = -\frac{M(x) + N_1(x)a}{EJ_0}$$

Derivando due volte e ricordando che :

$$N_1''(x) = \beta M(x) + \alpha^2 N_1(x) = \beta M(x) + \alpha^2 \left(-\frac{EJ_0}{a} w''(x) - \frac{M(x)}{a} \right)$$

si ottiene l'equazione differenziale del quarto ordine a coefficienti costanti :

$$w^{IV}(x) - \alpha^2 w''(x) = \alpha^2 \frac{M(x)}{EJ_\infty} + \frac{q(x)}{EJ_0}$$

La soluzione generale dell'omogenea associata è :

$$A_w \sinh(\alpha x) + B_w \cosh(\alpha x) + C_w + D_w$$

La soluzione particolare per carichi $q(x)$ al più lineari è:

$$-\frac{1}{EJ_\infty} \iint M(x) dx + \frac{\beta a}{\alpha^4} \frac{M(x)}{EJ_0} \rightarrow$$

$$\rightarrow w(x) = A_w \sinh(\alpha x) + B_w \cosh(\alpha x) + C_w + D_w - \frac{1}{EJ_\infty} \iint M(x) dx + \frac{\beta a}{\alpha^4} \frac{M(x)}{EJ_0}$$

Le costanti A_w , B_w , C_w e D_w si determinano in base alle condizioni al contorno. Nota $w(x)$ è possibile ricavare le altre grandezze in base alle seguenti relazioni:

$$N_1(x) = E_1 A_1 u_1'(x) = -\frac{1}{a} (EJ_0 w''(x) + M(x)) \quad N_2(x) = -N_1(x) = \frac{1}{a} (EJ_0 w''(x) + M(x))$$

$$M_i(x) = -E_i J_i w''(x)$$

$$V_i(x) = M_i'(x) + N_1'(x) \frac{h_i}{2} = -E_i J_i w'''(x) + \frac{h_i}{2a} (EJ_0 w'''(x) + V(x))$$

$$V_s(x) = -N_1'(x) = \frac{1}{a} (EJ_0 w'''(x) + V(x))$$

$$\delta(x) = \Delta u(x) = \frac{V_s(x)}{k} = \frac{1}{ka} (EJ_0 w'''(x) + V(x))$$

Con riferimento ad una trave semplicemente appoggiata, si ottiene:

$$V(x) = \frac{q}{2}(l-2x) \quad M(x) = \frac{q}{2}(lx-x^2) \quad \iint M(x) dx = \frac{q}{24}(2lx^3-x^4)$$

con le condizioni al contorno:

$$w(0) = w(l) = w''(0) = w''(l) = 0$$

posto:

$$g(x) = 1 - \cosh(\alpha x) + \sinh(\alpha x) \cdot \tanh\left(\frac{\alpha l}{2}\right)$$

si ha:

$$w(x) = \frac{q}{24EJ_\infty} (l^3 x - 2lx^3 + x^4) + q \left(\frac{1}{EJ_0} - \frac{1}{EJ_\infty} \right) \cdot \left[\frac{(lx-x^2)}{2\alpha^2} - \frac{g(x)}{\alpha^4} \right]$$

Il primo termine è $w_\infty(x)$, ovvero la deformata per connessione infinitamente rigida, il secondo termine è il contributo alla deformata dovuto alla cedevolezza delle connessioni. Si può anche scrivere:

$$w(x) = w_\infty(x) + (w_0(x) - w_\infty(x)) \cdot \frac{(12\alpha^2 (lx-x^2) - 24g(x))}{\alpha^4 (l^3 x - 2lx^3 + x^4)}$$

Lo sforzo normale vale:

$$N_1(x) = -N_2(x) = -\frac{EA_0 a}{EJ_\infty} M(x) + \frac{EA_0 a}{EJ_\infty} \frac{q}{\alpha^2} g(x)$$

Anche in questo caso il primo termine è l'azione assiale per connessione infinitamente rigida, mentre il secondo termine è la riduzione di N dovuta alla cedevolezza delle unioni. Quindi:

$$N_1(x) = N_{1\infty}(x) \cdot \left[1 - \frac{2g(x)}{\alpha^2 (lx - x^2)} \right]$$

Si noti che l'espressione in parentesi tende a zero se $k \rightarrow 0$, mentre tende ad uno se $k \rightarrow \infty$.

$$M_i(x) = \frac{E_i J_i}{EJ_\infty} M(x) + \left(\frac{E_i J_i}{EJ_0} - \frac{E_i J_i}{EJ_\infty} \right) \frac{q}{\alpha^2} g(x)$$

Come nei casi precedenti si può scrivere :

$$M_i(x) = M_{i\infty}(x) + (M_{i0}(x) - M_{i\infty}(x)) \frac{2g(x)}{\alpha^2 (lx - x^2)}$$

$$V_i(x) = \left(\frac{E_i J_i}{EJ_\infty} + \frac{EA_0 a h_i}{EJ_\infty 2} \right) V(x) + \left(\frac{E_i J_i}{EJ_0} - \left(\frac{E_i J_i}{EJ_\infty} + \frac{EA_0 a h_i}{EJ_\infty 2} \right) \right) \frac{q}{\alpha} f(x)$$

$$f(x) = \cosh(\alpha x) \cdot \tanh\left(\frac{\alpha l}{2}\right) - \sinh(\alpha x); \quad f'(x) = \frac{g'(x)}{\alpha}$$

Anche in questo caso si può scrivere :

$$V_i(x) = V_{i\infty}(x) + (V_{i0}(x) - V_{i\infty}(x)) \frac{2f(x)}{\alpha(l - 2x)}$$

$$V_s(x) = \frac{EA_0 a}{EJ_\infty} V(x) - \frac{EA_0 a}{EJ_\infty} \frac{q}{\alpha} f(x)$$

che può essere scritta come:

$$V_s(x) = V_{s\infty}(x) \left(1 - \frac{2f(x)}{\alpha(l - 2x)} \right)$$

$$\Delta u(x) = \delta(x) = \frac{V_s(x)}{k} = \frac{EA_0 a}{kEJ_\infty} V(x) - \frac{EA_0 a}{kEJ_\infty} \frac{q}{\alpha} f(x)$$

Considerando che lo scorrimento per connessione con rigidezza nulla è :

$$\delta_0(x) = \frac{qa}{24EJ_0} (l^3 - 6lx^2 + 4x^3)$$

si può scrivere :

$$\delta(x) = \delta_0(x) \cdot 12 \frac{\alpha(l-2x) - 2f(x)}{\alpha^3(l^3 - 6lx^2 + 4x^3)}$$

Si noti che le due funzioni $g(x)$ e $f(x)$, pur avendo espressioni complicate, nei casi limite sono sempre nulle se la connessione ha rigidezza nulla e hanno valore 1 se la rigidezza è infinita.

1.2.3.2 Soluzione DIN e EC 5

Tenendo conto delle equazioni di congruenza e di legame elastico:

$$N_1 = E_1 A_1 \varepsilon_1 = E_1 A_1 u_1'$$

le equazioni di equilibrio alla traslazione degli elementi 1 e 2 si scrivono, rispettivamente:

$$E_1 A_1 \cdot u_1''(x) + k(u_2(x) - u_1(x) + w'(x) \cdot a) = 0$$

$$E_2 A_2 u_2''(x) - k(u_2(x) - u_1(x) + w'(x) \cdot a) = 0$$

mentre l'equilibrio alla rotazione fornisce:

$$M_1'(x) + M_2'(x) = -\sum E_i J_i w'''(x) = V(x) - V_s(x) \cdot a$$

differenziando si ottiene:

$$EJ_0 \cdot w^{IV}(x) - ka(u_2'(x) - u_1'(x) + w''(x)a) = q(x)$$

che costituiscono un sistema di 3 equazioni differenziali nelle incognite $u_1(x)$, $u_2(x)$ e $w(x)$.

Approssimando il carico ad una funzione sinusoidale

$$q = q_0 \sin(\pi x/L)$$

è possibile assumere per le incognite funzioni della seguente forma:

$$u_1(x) = u_{10} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \rightarrow u_1'(0) = u_1'(l) = 0 \rightarrow N_1(0) = N_1(l)$$

$$u_2(x) = u_{20} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \rightarrow u_2'(0) = u_2'(l) = 0 \rightarrow N_2(0) = N_2(l)$$

$$w(x) = w_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \Rightarrow [w(0) = w(l) = 0]$$

e il sistema precedente si riduce a un sistema di 3 equazioni algebriche nelle incognite u_{10} , u_{20} e w_0 :

$$\begin{cases} -\frac{\pi^2}{l^2} E_1 A_1 \cdot u_{10} + k \left(u_{20} - u_{10} + \frac{\pi}{l} a \cdot w_0 \right) = 0 \\ -\frac{\pi^2}{l^2} E_2 A_2 \cdot u_{20} - k \left(u_{20} - u_{10} + \frac{\pi}{l} a \cdot w_0 \right) = 0 \\ \frac{\pi^4}{l^4} E J_0 w_0 + \frac{\pi}{l} a \cdot k \left(u_{20} - u_{10} + \frac{\pi}{l} a \cdot w_0 \right) = q_0 \end{cases}$$

Ponendo :

$$k_1 = \frac{\pi^2 E_1 A_1}{kl^2} \qquad \gamma_1 = \frac{1}{1+k_1},$$

$$EJ_{ef} = EJ_0 + EA_0^* a^2 \qquad EA_0^* = \frac{\gamma_1 E_1 A_1 \cdot E_2 A_2}{\gamma_1 E_1 A_1 + E_2 A_2} = \left(\frac{1}{\gamma_1 E_1 A_1} + \frac{1}{E_2 A_2} \right)^{-1}$$

la soluzione del sistema è:

$$w(x) = \frac{q_0 l^4}{\pi^4 EJ_{ef}} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

$$u_1(x) = \frac{q_0 l^3}{\pi^3 EJ_{ef}} \frac{EA_0^* \cdot a}{E_1 A_1} \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

$$u_2(x) = -\frac{q_0 l^3}{\pi^3 EJ_{ef}} \frac{EA_0^* \cdot a}{E_2 A_2} \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

Il fattore adimensionale γ_1 riveste il ruolo di “peso” per l’area del solo elemento 1. Lo sforzo normale vale:

$$N_1(x) = E_1 A_1 \varepsilon_1(x) = E_1 A_1 u_1'(x) = -\frac{EA_0^* a}{EJ_{ef}} \frac{q_0 l^2}{\pi^2} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

Confrontando $\frac{q_0 l^2}{\pi^2} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$ con $M(x)$ si ottiene:

$$N_1(x) = -\frac{EA_0^* a}{EJ_{ef}} M(x)$$

$$M_i(x) = -E_i J_i w''(x) = \frac{E_i J_i}{EJ_{ef}} \frac{q_0 l^2}{\pi^2} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

Da cui

$$M_i(x) = \frac{E_i J_i}{EJ_{ef}} M(x)$$

$$V_i(x) = M_i'(x) + V_s(x) \frac{hi}{2} = M_i'(x) + N_i'(x) \frac{hi}{2} = \left(\frac{E_i J_i}{EJ_{ef}} + \frac{EA_0^* a}{EJ_{ef}} \frac{h_i}{2} \right) q_0 \frac{l}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

Confondendo $q_0 l / \pi \cdot \cos(\pi x / l)$ con $V(x)$ si ottiene:

$$V_i(x) = \frac{E_i J_i + EA_0^* a \frac{h_i}{2}}{EJ_{ef}} V(x)$$

$$V_S(x) = -N_1'(x) = \frac{EA_0^* a q_0 l}{EJ_{ef} \pi} \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

Da cui :

$$V_S(x) = \frac{EA_0^* a}{EJ_{ef}} V(x)$$

espressione lineare in x che per $\alpha \neq \infty$ sovrastima V_S all'appoggio.

In alternativa, partendo dall'espressione

$$V_S(x) = k[u_2(x) - u_1(x) + w'(x) \cdot a]$$

si ottiene

$$V_S(x) = \frac{k \cdot a}{EJ_{ef}} \left(1 - \frac{EA_0^*}{EA_0}\right) \frac{q_0 l^3}{\pi^3} \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

da cui confondendo $q_0 l^3 / \pi^3 \cdot \cos(\pi x/l)$ con $-\int M(x)dx$ ed imponendo $V_S(l/2) = 0$ si ha :

$$V_S(x) = \frac{k \cdot a}{EJ_{ef}} \left(1 - \frac{EA_0^*}{EA_0}\right) \frac{q_0}{24} (l^3 - 6l \cdot x^2 + 4x^3) = \frac{k \cdot EJ_0}{EJ_{ef}} \left(1 - \frac{EA_0^*}{EA_0}\right) \delta_0(x)$$

che rappresenta una soluzione più aderente alla soluzione esatta per $\alpha \neq \infty$.

Lo scorrimento si scrive:

$$\Delta u(x) = s(x) = u_2(x) - u_1(x) + w'(x)a = \frac{EJ_0}{EJ_{ef}} \left(1 - \frac{EA_0^*}{EA_0}\right) \frac{q \cdot a}{24EJ_0} (l^3 - 6lx^2 + 4x^3) = \frac{EJ_0}{EJ_{ef}} \left(1 - \frac{EA_0^*}{EA_0}\right) \delta_0(x)$$

e lo spostamento vale:

$$w(x) = \frac{q_0 l^4}{\pi^4 EJ_{ef}} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) = \frac{q}{24EJ_{ef}} (l^3 x - 2lx^3 + x^4)$$

dove l'espressione di $w(x)$ in $\sin(\pi x/l)$ è stata sostituita dalla doppia integrazione di $M(x)$ con le condizioni al contorno $w(0) = w(L) = 0$.

Nell'elemento superiore, la tensione baricentrica vale:

$$\sigma_{S1} = \frac{N_1(x)}{A_1} = -\frac{M(x) EA_0^* \cdot a}{EJ_{ef} A_1} = -\frac{M(x)}{EJ_{ef}} \gamma_1 E_1 a_1^*$$

(si ricorda che $\gamma_1 E_1 A_1 a_1^* = E_2 A_2 a_2^* = EA_0^* \cdot a$), mentre la tensione di compressione massima è:

$$\sigma_{R1} = \frac{N_1(x)}{A_1} - \frac{M_1(x) h_1}{J_1} \frac{h_1}{2} = \sigma_{S1} - \frac{M(x)}{EJ_{ef}} E_1 \frac{h_1}{2} = -\frac{M(x)}{EJ_{ef}} E_1 \left(\gamma_1 a_1^* + \frac{h_1}{2}\right)$$

Nell'elemento inferiore, la tensione baricentrica vale:

$$\sigma_{S2} = \frac{N_2(x)}{A_2} = \frac{M(x)}{EJ_{ef}} E_2 a_2^*$$

mentre la tensione massima è:

$$\sigma_{R2} = \frac{N_2(x)}{A_2} + \frac{M_2(x)}{J_2} \frac{h_2}{2} = \frac{M(x)}{EJ_{ef}} E_2 \left(a_2^* + \frac{h_2}{2} \right)$$

Le tensioni tangenziali sono fornite dalla formula di Jourawsky; nell'elemento superiore si ha:

$$\tau_1(z) \cdot b_1 = \int_z^{\frac{h_1}{2}} b_1 \Delta \sigma_1(y) dy$$

con

$$\Delta \sigma_1(y) = \frac{V(x)}{EJ_{ef}} E_1 (\gamma_1 a_1^* + y)$$

Sostituendo:

$$\tau_1(z) b_1 = \frac{V(x)}{EJ_{ef}} E_1 b_1 \int_z^{\frac{h_1}{2}} (\gamma_1 a_1^* + y) dy = \frac{V(x)}{EJ_{ef}} E_1 b_1 \left(\frac{h_1}{2} - z \right) \left(\gamma_1 a_1^* + \frac{h_1/2 + z}{2} \right) = \frac{V(x)}{EJ_{ef}} E_1 S_1^*(z)$$

dove

$$S_1^*(z) = b_1 \left(\frac{h_1}{2} - z \right) \left(\gamma_1 a_1^* + \frac{h_1/2 + z}{2} \right)$$

è il momento statico dell'area tratteggiata rispetto all'asse baricentrico dell'elemento 1 (Figura 2.3.6).

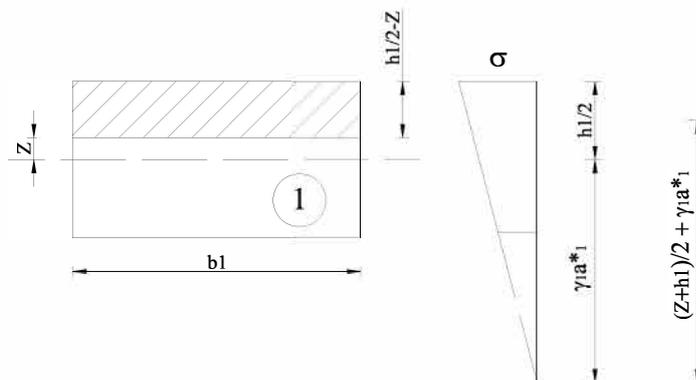


Figura 2.3.6– Calcolo del momento statico

Possono verificarsi due casi:

- se $\gamma_1 a_1^* > h_1/2$, la tensione tangenziale nell'elemento 1 aumenta fino all'interfaccia, dove assume il valore massimo

$$\tau_{1\max} = \frac{V(x)}{b_1 E J_{ef}} E_1 S_1^* \left(-\frac{h_1}{2} \right) = \frac{V_s(x)}{b_1}$$

- se $\gamma_1 a_1^* < h_1/2$, la tensione tangenziale è massima sull'asse neutro dell'elemento 1

$$\gamma_1 a_1^* < \frac{h_1}{2} \Rightarrow \tau_{1\max} = \frac{V(x)}{b_1 E J_{ef}} E_1 S_1^* (-\gamma_1 a_1^*)$$

Analogamente, nell'elemento inferiore:

$$\tau_{2\max} = \frac{V(x)}{b_2 E J_{ef}} E_2 b_2 \left(\frac{h_2}{2} + a_2^* \right) \frac{1}{2} \left(\frac{h_2}{2} + a_2^* \right) = \frac{V(x)}{b_2 E J_{ef}} E_2 \frac{b_2}{2} \left(\frac{h_2}{2} + a_2^* \right)^2 = \frac{V(x)}{b_2 E J_{ef}} E_2 S_2^* (-a_2^*).$$

1.2.3.3 Formule di verifica secondo DIN e EC5

Gli attuali documenti normativi (DIN 1052/2004, EN 1995/2004) propongono, per la verifica di travi composte a connessione deformabile, alcune formule derivanti da una trattazione semplificata del problema, nel caso di trave in semplice appoggio e carico distribuito variabile con legge sinusoidale $q = q_0 \sin(\pi x/L)$. La sezione composta (elemento 1 = soletta in c.a., elemento 2 = trave in legno) presenta il piano di simmetria verticale e si conserva costante lungo l'asse rettilineo della trave. La scrittura delle equazioni di equilibrio alla traslazione orizzontale degli elementi 1 e 2, assieme alle equazioni del tratto dx degli stessi elementi, consente di giungere al sistema di 3 equazioni differenziali negli incognite u_1 , u_2 e w :

$$\begin{cases} E_1 A_1 \cdot u_1'' + k(u_2 - u_1 + w'a) = 0 \\ E_2 A_2 \cdot u_2'' - k(u_2 - u_1 + w'a) = 0 \\ \sum_i E_i J_i \cdot w_1^{IV} - ka(u_2' - u_1' + w''a) = q \end{cases}$$

L'assunzione del carico a distribuzione sinusoidale permette di esprimere le incognite spostamenti assiali u_1 , u_2 e verticale w nelle seguenti forme:

$$u_1 = u_{10} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad u_2 = u_{20} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad w = w_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

Sotto queste ipotesi il sistema risolvibile si riduce ad un sistema di equazioni algebriche nelle incognite u_{10} , u_{20} e w_0 .

Il metodo proposto si basa sulle seguenti ipotesi:

- le travi sono ad una campata, semplicemente appoggiate, con luce L ; per travi continue le formule possono essere usate considerando L pari a 0.8 volte la luce effettiva; per travi a mensola adottando L uguale al doppio dello sbalzo;
- le singole parti componenti la sezione sono in un solo pezzo o realizzate tramite giunti di continuità incollati;
- le singole parti componenti la sezione sono tra loro collegate attraverso mezzi di unione meccanici con modulo di scorrimento K e interasse s costante per tutta la lunghezza della trave o variabile in funzione dello sforzo di taglio fra s_{min} ed s_{max} , con $s_{max} \leq 4 s_{min}$;
- il carico agisce in direzione verticale determinando un momento $M(x)$, che varia con legge sinusoidale o parabolica, e uno sforzo di taglio $V(x)$.

Al fini delle verifiche la sezione composta si comporta come una sezione semplice avente rigidità flessionale equivalente data da (Eurocodice 5, Appendice B):

$$E J_{ef} = \sum E_i J_i + \gamma_2 \cdot E_2 A_2 a_2^2 + \gamma_1 \cdot E_1 A_1 a_1^2$$

dove :

$$\gamma_2 = 1$$

e

$$\gamma_1 = \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 E_1 A_1 s_{eq}}{K \cdot L^2}} \quad \text{o} \quad \gamma_1 = \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 E_1 A_1}{k \cdot L^2}}$$

rispettivamente nel caso di connessione puntuale e connessione distribuita. Il fattore dimensionale γ_1 riveste, nel calcolo della rigidezza flessionale equivalente della sezione composta, il ruolo di “peso” per l’area dell’elemento 1. Avendo indicato la variabile a come la distanza tra i baricentri geometrici di sezione degli elementi 1 e 2, le espressioni delle distanze tra i baricentri geometrici di sezione degli elementi 1 e 2 e il baricentro globale della sezione mista sono date da :

$$a_2 = \frac{\gamma_1 E_1 A_1}{\gamma_1 E_1 A_1 + E_2 A_2} \quad a_1 = a - a_2$$

Nel caso in cui sia la trave che la soletta abbiano forma rettangolare, con la presenza di un eventuale gap t dovuto alla distanza tra i due elementi, la variabile a assume la forma:

$$a = h_1/2 + h_2/2 + t$$

Nelle verifiche si assumerà come valore del modulo di scorrimento:

- $K = K_{ser}$ per le verifiche allo SLE;
- $K = K_u = 2/3 \cdot K_{ser}$ per le verifiche allo SLU.

Nota la rigidezza si determinano, le sollecitazioni normali e flessionali agenti su ciascun elemento:

$$N_{i,d} = \frac{\gamma_i \cdot E_i \cdot a_i \cdot A_i}{EJ_{ef}} \cdot M_d \quad M_{i,d} = \frac{EJ_i}{EJ_{ef}} \cdot M_d$$

da cui si ricavano le tensioni ai lembi dell’ elemento i -esimo, come somma algebrica della tensione baricentrica σ_i e della componente flessionale $\sigma_{m,i}$ (Figura 2.3.7):

$$\sigma_i \pm \sigma_{m,i} = \frac{N_{i,d}}{A_i} \pm \frac{M_{i,d}}{W_i}$$

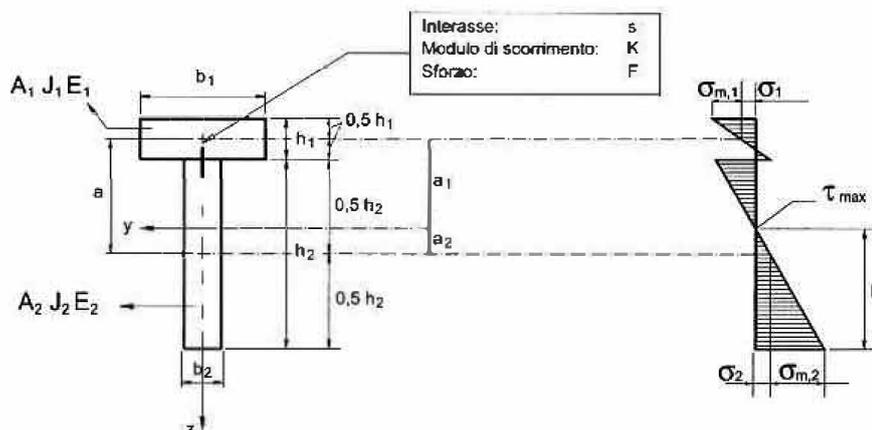


Figura 2.3.7 – Trave composta con connessione deformabile, distribuzione delle tensioni (da Piazza et al., 2005)

Il massimo sforzo di taglio agente nell'elemento d'anima (elemento 2) e la forza cui è sottoposta la connessione tra i due elementi, sono date rispettivamente da:

$$\tau_{2,\max} = \frac{0.5 \cdot E_2 \cdot h^2}{EJ_{ef}} \cdot V \quad F = \frac{\gamma_1 \cdot E_1 \cdot A_1 \cdot a_1 \cdot s_{eq}}{EJ_{ef}} \cdot V$$

Nel caso di connessione distribuita lungo la trave, la sollecitazione per unità di lunghezza è:

$$f = \frac{\gamma_1 \cdot E_1 \cdot A_1 \cdot a_1}{EJ_{ef}} \cdot V$$

Una misura dell'efficienza della connessione è fornita dal parametro adimensionale:

$$\eta = \frac{EJ_{reale} - EJ_0}{EJ_{\infty} - EJ_0}$$

compreso tra 0 e 1. Con collegamenti molto rigidi EJ_{reale} risulta prossimo a EJ_{∞} ($\eta \rightarrow 1$); con collegamenti molto deformabili EJ_{reale} risulta prossimo a EJ_0 ($\eta \rightarrow 0$). Valori reali del parametro η per gli usuali solai composti lignei, con soletta in calcestruzzo oppure in legno, sono compresi tra 0.4 e 0.7.

Il massimo sforzo di taglio agente nell'elemento d'anima (elemento 2) e la forza cui è sottoposta la connessione tra i due elementi, sono date rispettivamente da:

$$\tau_{2,\max} = \frac{0.5 \cdot E_2 \cdot h^2}{EJ_{ef}} \cdot V \quad F = \frac{\gamma_1 \cdot E_1 \cdot A_1 \cdot a_1 \cdot s_{eq}}{EJ_{ef}} \cdot V$$

Nel caso di connessione distribuita lungo la trave, la sollecitazione per unità di lunghezza è:

$$f = \frac{\gamma_1 \cdot E_1 \cdot A_1 \cdot a_1}{EJ_{ef}} \cdot V$$

Una misura dell'efficienza della connessione è fornita dal parametro adimensionale:

$$\eta = \frac{EJ_{reale} - EJ_0}{EJ_{\infty} - EJ_0}$$

compreso tra 0 e 1. Con collegamenti molto rigidi EJ_{reale} risulta prossimo a EJ_{∞} ($\eta \rightarrow 1$); con collegamenti molto deformabili EJ_{reale} risulta prossimo a EJ_0 ($\eta \rightarrow 0$). Valori reali del parametro η per gli usuali solai composti lignei, con soletta in calcestruzzo oppure in legno, sono compresi tra 0.4 e 0.7.